UNIDAD II

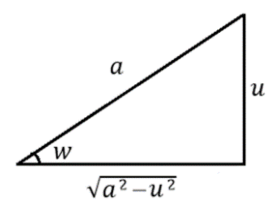
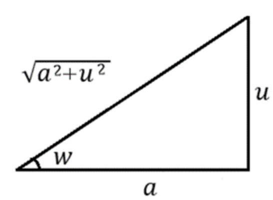
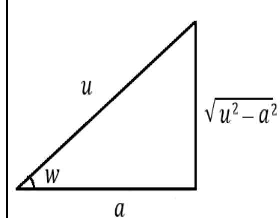
MÉTODOS DE INTEGRACIÓN

MÉTODOS DE INTEGRACIÓN

No todas las funciones en un integrando se pueden resolver mediante reglas inmediatas de integración, y requieren ser tratadas con técnicas especiales.

MÉTODO DE INTEGRACIÓN POR SUSTITUCIÓN TRIGONOMÉTRICA

Algunas integrales que involucran expresiones de la forma $\sqrt{a^2-u^2}$, $\sqrt{a^2+u^2}$, $\sqrt{u^2-a^2}$, deben resolverse utilizando las siguientes transformaciones:

Caso	Cambio	Diferencial	Transformación	Triángulo
$\sqrt{a^2-u^2}$	$u = a\, sen\, w$	$du = a\, cos\, w\, dw$	$\sqrt{a^2-u^2} = \text{a} \cos w$	
$\sqrt{a^2+u^2}$	$u = a \tan\ w$	$du = a\, sec^2\, w\, dw$	$\sqrt{a^2+u^2} = a \sec w$	
$\sqrt{u^2-a^2}$	$u = a \sec\ w$	$du = a \sec w \tan w\, dw$	$\sqrt{u^2-a^2} = a \tan w$	

Ejemplo 1: Obtener la integral $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{25-x^2}}$

El integrando contiene $\sqrt{25-x^2}$ que es de la forma: $\sqrt{a^2-u^2}$

Por lo que x= u se sustituye por lo indicado en la tabla 1:

$$Como\ \ a^2 = 25\ \ luego\ a = 5$$

$$x = u = a\ sen\, w = 5\ sen\, w$$

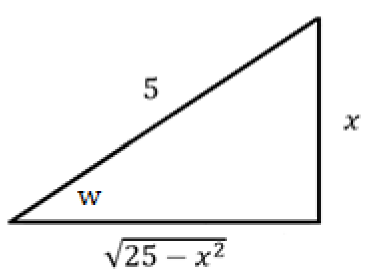
$$dx = du = -5\cos w\, dw$$

$$\sqrt{25-x^2}\ = \sqrt{25-u^2}\ = 5\cos w$$

Entonces la integral se puede reinscribir de la siguiente manera:

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{25-x^2}} = \int \frac{-5\cos w\, dw}{(5\ sen\, w)^2(5\cos w)} = \int \frac{-5\cos w}{125\ sen^2\, w\cos\ w}dw$$
$$= -\frac{1}{25}\int \frac{1}{sen^2 w}dw\ = -\frac{1}{25}\int csc^2 w\, dw\ = \frac{1}{25}\cot\ w + c$$

Como la integral que se obtiene está en términos de la variable w, se debe regresar a la variable original (x). Para ello se utiliza el siguiente triángulo rectángulo:



La cotangente está definida como:

$$\cot\ w = \frac{cateto\ adyacente}{cateto\ opuesto}$$

$$\cot\ w = \frac{\sqrt{25-x^2}}{x}$$

Entonces el resultado de la integral es:

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{25-x^2}} = \frac{1}{25}\cot\ w + c$$

$$= \frac{\sqrt{25-x^2}}{25\ x} + c$$

Ejemplo 2: Obtener la integral $\int \frac{\sqrt{x^2-36}}{x} dx$

El radical tiene la forma $\sqrt{x^2-u^2}$, consultando la tabla 1, x = u será sustituida por:

$$\text{Como } a^2 = 36 \quad luego \quad a = 6$$

$$x = u = a \sec w = 6 \sec w$$

$$dx = du = 6 \sec w \tan w \, dw$$

$$\sqrt{x^2-36} = \sqrt{u^2-36} = 6 \tan w$$

Entonces la integral se puede reinscribir de la siguiente manera:

$$\int \frac{\sqrt{x^2-36}}{x} dx = \int \frac{6 \tan w \, (6 \sec w \tan w \, dw)}{6 \sec w}$$

$$= \int \frac{6\, tan^2 \, w \sec w}{\sec w} dw$$

$$= 6 \int tan^2 \, w \, dw = 6 \int (sec^2 w - 1) dw = 6(\tan w - w) + C$$

$$= 6 \tan w - 6w + C$$

Para regresar a la variable original utilizamos el siguiente triángulo:

La tangente está definida como:

$$\tan w = \frac{cateto\ opuesto}{cateto\ adyacente}$$

$$\tan w = \frac{\sqrt{u^2-36}}{6}$$

Entonces el resultado de la integral es:

$$\int \frac{\sqrt{x^2-36}}{x} dx = 6 \tan w - 6w + C$$

$$= 6\, \frac{\sqrt{x^2-36}}{6} - arc \tan \frac{\sqrt{x^2-36}}{6} + c$$

Ejercicios: Resolver las siguientes integrales utilizando el método de sustitución trigonométrica.

1. $\int \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}} dx$
2. $\int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2} dx$
3. $\int \frac{1}{x\sqrt{9+x^2}} dx$
4. $\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2+25}} dx$
5. $\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2-16}} dx$
6. $\int \frac{1}{x^3\sqrt{x^2-49}} dx$
7. $\int \frac{x}{\sqrt{4-x^2}} dx$
8. $\int \frac{x}{x^2+9} dx$
9. $\int \sqrt{9-4x^2}\, dx$
10. $\int \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} dx$
11. $\int x\sqrt{x^2-9}\, dx$
12. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+4}}$
13. $\int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2} dx$
14. $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2+6}} dx$
15. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4-x^2}}$

MÉTODO DE INTEGRACIÓN POR PARTES

Cuando una integral tiene una función y la derivada de otra función, se utiliza el método de integración por partes para poder llevarla a cabo. La fórmula utilizada para dicha integración se la siguiente:

$$\int udv = uv - \int vdu$$

Ésta es obtenida de la fórmula para derivar un producto de dos funciones, como se muestra en seguida:

$$\frac{d}{dx}(uv) = u\frac{d}{dx}v + v\frac{d}{dx}u$$

De esta se despeja $u\frac{d}{dx}v$ obteniéndose

$$u\frac{d}{dx}v = \frac{d}{dx}(uv) + v\frac{d}{dx}u$$

Aplicando la integración

$$\int u\frac{d}{dx}v = \int \frac{d}{dx}(uv) + \int v\frac{d}{dx}u$$

Se obtiene

$$\int u\frac{d}{dx}v = uv + \int v\frac{d}{dx}u$$

Ejemplo 1: Resolver la siguiente integral $\int 3xe^{5x}dx$

Lo primero que se tiene que hacer es seleccionar del integrando que va a ser u y dv, y una vez seleccionado, se procede a derivar u e integrar dv para poder sustituir en la fórmula de integración por partes

$$u = 3x \qquad du = 3dx$$

$$dv = e^{5x}dx \qquad \int dv = \int e^{5x}dx \qquad v = \frac{1}{5}e^{5x}$$

$$\int 3xe^{5x}dx = 3x\left(\frac{1}{5}e^{5x}\right) - \int \frac{1}{5}e^{5x}(3)dx = \frac{3}{5}xe^{5x} - \frac{3}{5}\int e^{5x}dx = \frac{3}{5}xe^{5x} - \frac{3}{25}e^{5x} + c$$

Ejemplo 2. Resolver la siguiente integral $\int 2x^2cos4xdx$

$$u = 2x^2 \qquad du = 4xdx$$

$$dv = cos4xdx \qquad \int dv = \int cos4xdx \qquad v = \frac{1}{4}sen4x$$

$$\int 2x^2cos4xdx = 2x^2\left(\frac{1}{4}sen4x\right) - \int \frac{1}{4}sen4x(4x)dx = \frac{2}{4}x^2sen4x - \int xsen4xdx$$

Para poder integrar lo que queda es necesario aplicar nuevamente integración por partes,

$$u = x \qquad du = 1dx$$

$$dv = cos4xdx \qquad \int dv = \int sen4xdx \qquad v = -\frac{1}{4}cos4x$$

$$\frac{2}{4}x^2sen4x - \int xsen4xdx = \frac{1}{2}x^2sen4x - \left(x\left(-\frac{1}{4}cos4x\right) - \int -\frac{1}{4}cos4x(1)dx\right)$$
$$= \frac{1}{2}x^2sen4x + \frac{1}{4}xcos4 - \frac{1}{4}\int cos4xdx =$$

$$= \frac{1}{2}x^2sen4x + \frac{1}{4}xcos4x - \frac{1}{16}sen4x + c$$

Otra forma de integrar utilizando la integración de una manera simplificada, se puede utilizar el siguiente método:

	u	dv
+	$2x^2$	$cos4x$
-	$4x$	$\frac{1}{4}sen4x$
+	4	$-\frac{1}{16}cos4x$
-	0	$-\frac{1}{64}sen4x$

Multiplicando en forma de diagonal (segundo renglón por tercero) para obtener el resultado:

$$\int 2x^2cos4xdx = (2x^2)\left(\frac{1}{4}sen4x\right) - (4x)\left(-\frac{1}{16}cos4x\right) + (4)\left(-\frac{1}{64}sen4x\right)$$

$$= \frac{2}{4}x^2sen4x + \frac{4}{16}xcos4x - \frac{4}{64}sen4x + c = \frac{1}{2}x^2sen4x + \frac{1}{4}xcos4x - \frac{1}{16}sen4x + C$$

Ejemplo 3. Resolver la integral $\int arctan2xdx$

Seleccionando u ydv para la integral:

$$u = arctan2x \qquad du = \frac{1}{1+4x^2}dx$$

$$dv = dx \qquad \int dv = \int dx \qquad v = x$$

Sustituyendo en la fórmula de integración por partes

$$\int arctan2xdx = (arctan2x)(x) - \int (x)\left(\frac{1}{1+4x^2}\right)dx = xarctan2x - \int \frac{x}{1+4x^2}dx$$

$$= xarctan2x - \frac{1}{8}ln|1+4x^2| + C$$

Ejercicios. Utilizando el método de integración por partes, obtén las siguientes integrales

1. $\int x^2e^{2x}\,dx$
2. $\int 3x^3e^{5x}\,dx$
3. $\int xe^x\,dx$
4. $\int x^3e^{x^2}\,dx$
5. $\int xcos5x\,dx$
6. $\int 3x^2sen2x\,dx$
7. $\int 7x^3sen3x\,dx$
8. $\int 2t^2cost\,dt$
9. $\int xln(4x)\,dx$
10. $\int 7xlnx\,dx$
11. $\int x^2cos5xdx$
12. $\int xsecxtanxdx$
13. $\int xcsc^2xdx$
14. $\int \arctan x\,dx$
15. $\int arcsen\,xdx$
16. $\int x2^xdx$
17. $\int e^xcos\,xdx$
18. $\int e^xsen\,xdx$
19. $\int e^{3x}cos\,2xdx$
20. $\int e^{4x}sen\,5xdx$
21. $\int arc\cos x\,dx$

MÉTODO DE INTEGRACIÓN POR FRACCIONES PARCIALES

Sea $F(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$ una función racional, donde $f(x)$ y $g(x)$ son polinomios. Teóricamente el polinomio $g(x)$ se puede expresar como un producto de polinomios de la forma $ax+b$ y polinomios cuadráticos ax^2+bx+c irreducibles.

Para $F(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$, se puede factorizar $g(x)$, esto con el objetivo de expresar la función racional como la suma de expresiones racionales cuyos denominadores son los factores que se obtienen al factorizar el polinomio $g(x)$:

$$F(x)=\frac{f(x)}{g(x)}=F_1+F_2+\cdots+F_r$$

Donde cada F_r es una fracción racional cuyo denominador son polinomios de la forma: $ax+b$ o bien ax^2+bx+c.

Existen cuatro casos par el método de integración por fracciones parciales, dependiendo de los factores que se obtengan al factorizar $g(x)$:

CASO I. Factores lineales diferentes.

Para la fracción racional $F(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$, si al factorizarla $g(x)$ se obtienen factores lineales diferentes, entonces se expresa la función racional como una suma de fracciones racionales como sigue:

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(x)}{(ax+b)(cx+d)(ex+f)\ldots}=\frac{A}{ax+b}+\frac{B}{cx+d}+\frac{C}{ex+f}+\cdots$$

Donde A,B, C, … son constantes a determinar.

Ejemplo 1. Obtener la integral $\int\frac{5x+7}{x^2+2x-3}dx$

Lo primero que se debe verificar es que el grado de la función del denominador sea de grado mayor que la del numerador, en caso contrario se tendría que realizar una división algebraica. Después se procede a factorizar el polinomio del denominador:

$$\int\frac{5x+7}{x^2+2x-3}dx=\int\frac{5x+7}{(x+3)(x-1)}dx$$

Las fracciones parciales que se derivan de la función racional son:

$$\frac{5x+7}{(x+3)(x-1)} = \frac{A}{x+3} + \frac{B}{x-1}$$

Se resuleven las fracciones para determinar el valor de A y B.

$$5x+7 = \left(\frac{A}{x+3} + \frac{B}{x-1}\right)(x+3)(x-1)$$

Multiplicando:

$$5x+7 = \frac{A(x+3)(x-1)}{x+3} + \frac{B(x+3)(x-1)}{x-1}$$

Simplifacando la expresión y agrupando los términos que tengan x y los que no tengan x:

$$5x+7 = A(x-1) + B(x+3)$$

$$5x+7 = Ax - A + Bx + 3B$$

$$5x+7 = x(A+B) + (-A+3B)$$

Para que la igualdad se cumpla se iguala cada uno de los términos del primer miembro con los correspondientes del segundo miembro, de aquí se obtiene un sistema de ecuaciones:

$$5 = A + B$$

$$7 = -A + 3B$$

Resolviéndolo se obtiene que $A = 2\ y\ B = 3$

Entonces la integral es:

$$\int \frac{5x+7}{x^2+2x-3} dx = \int \frac{2}{x+3} dx + \int \frac{3}{x-1} dx = 2ln|x+3| + 3ln|x-1| + C$$

CASO II. Factores lineales repetidos.

Para la fracción racional $F(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, si al factorizar $g(x)$ se obtienen n factores lineales repetidos, es decir n de ellos son iguales, entonces se expresa la función racional como una suma de fracciones racionales como sigue:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)}{(ax+b)^n} = \frac{A}{ax+b} + \frac{B}{(ax+c)^2} + \cdots + \frac{N}{(ax+b)^n}$$

Donde n es el número de veces que se repite el factor lineal.

Ejemplo: Integrar $\int \frac{5x^2-3x+3}{x^3-x^2}dx$

Primero se factoriza el denominador, obteniéndose lo siguiente:

$$\int \frac{5x^2-3x+3}{x^2(x-1)}dx$$

Entonces las fracciones parciales por las cuales se va a cambiar el integrando son:

$$\frac{5x^2-3x+3}{x^2(x-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-1}$$

Resolviendo las fracciones parciales

$$5x^2-3x+3 = \left(\frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-1}\right)(x^2)(x-1)$$

$$5x^2-3x+3 = \frac{A(x^2)(x-1)}{x} + \frac{B(x^2)(x-1)}{x^2} + \frac{C(x^2)(x-1)}{x-1}$$

$$5x^2-3x+3 = A(x)(x-1) + B(x-1) + Cx^2$$

$$5x^2-3x+3 = Ax^2 - Ax + Bx - B + Cx^2$$

Agrupando los términos que tengan en común x^2, los que tengan x y los términos independientes:

$$5x^2-3x+3 = x^2(A+C) + x(-A+B) + (-B)$$

De aquí se obtienen las ecuaciones que permitirán calcular el valor de las constantes A,B y C:

$$5 = A + C$$

$$-3 = -A + B$$

$$3 = -B$$

Resolviendo estas ecuaciones se obtiene que $A = 0, B = -3 \ y \ C = 5$

Sustituyendo estos valores en las fracciones parciales e integrando:

$$\int \frac{5x^2-3x+3}{x^2(x-1)}dx = \int \frac{A}{x}dx + \int \frac{B}{x^2}dx + \int \frac{C}{x-1}dx$$

$$=\int \frac{0}{x}dx + \int \frac{-3}{x^2}dx + \int \frac{5}{x-1}dx = \frac{3}{x} + 5ln|x-1| + C$$

CASO III. Factores cuadráticos diferentes.

En este caso al factorizar el denominador se obtienen factores cuadráticos irreducibles diferentes $ax^2 + bx + c$, y las fracciones parciales son de la forma:

$$\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$$

Ejemplo 3. Obtener al integral $\int \frac{x^2-x-21}{2x^3-x^2+8x-4}dx$

Factorizando del denominador $2x^3 - x^2 + 8x - 4 = (x^2+4)(2x-1)$

Las fracciones parciales para la función racional son:

$$\int \frac{x^2-x-21}{(x^2+4)(2x-1)}dx = \frac{Ax+B}{x^2+4} + \frac{C}{2x-1}$$

Resolviendo las fracciones parciales se obtiene:

$$x^2 - x - 21 = x^2(2A+B) + x(-A+2B) + (-B+4C)$$

Se obtiene las siguientes ecuaciones:

$$1 = 2A + B$$

$$-1 = -A + 2B$$

$$-21 = -B + 4C$$

Resolviendo el sistema se obtiene: $A = 3, B = 1\ y\ C = -5$

$$\int \frac{Ax+B}{x^2+4}dx + \int \frac{C}{2x-1}dx = \int \frac{3x+1}{x^2+4}dx + \int \frac{-5}{2x-1}dx$$

Resolviendo las integrales

$$\int \frac{3x+1}{x^2+4}dx + \int \frac{-5}{2x-1}dx = \frac{3}{2}\int \frac{2x}{x^2+4}dx - \frac{5}{2}\int \frac{2}{2x-1}dx$$

$$= \frac{3}{2}ln|x^2+4| - \frac{5}{2}ln|x-1| + C$$

CASO IV. Factores cuadráticos repetidos.

Cuando al factorizar el denominador de la función racional se obtienen factores cuadráticos irreducibles repetidos, la fracción propia se puede sustituir por fracciones parciales de la forma:

$$\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}+\frac{Dx+E}{(ax^2+bx+c)^2}+\frac{Dx+E}{(ax^2+bx+c)^3}+\cdots$$

Ejercicios: Resolver las siguientes integrales utilizando el método de integración por fraccione parciales.

1. $\int \frac{dx}{x^2-4}$	15. $\int \frac{3t}{2t^4+5t^2+2}dt$
2. $\int \frac{5x-1}{x^2-1}dx$	16. $\int \frac{dx}{16x^4-1}dx$
3. $\int \frac{7x-1}{x^2-x-6}dx$	17. $\int \frac{dx}{9x^4+x^2}$
4. $\int \frac{4w-11}{2w^2+7w-4}dw$	18. $\int \frac{x^2+x}{x^3-x^2+x-1}dx$
5. $\int \frac{4x-2}{x^3-x^2-2x}dx$	19. $\int \frac{x-3}{x^3+x^2}dx$
6. $\int \frac{x^2}{x^2+x-6}dx$	20. $\int \frac{x+4}{2x^2+5x+2}dx$
7. $\int \frac{9t^2-26t-5}{3t^2-5t-2}dt$	21. $\int \frac{2x^2+13x+18}{x^3+6x^2+9x}dx$
8. $\int \frac{dt}{(t+2)^2(t+1)}$	22. $\int \frac{4+5x^2}{4x+x^3}dx$
9. $\int \frac{3x^2-x+1}{x^3-x^2}dx$	23. $\int \frac{xdx}{x^3+2x^2+x+2}$
10. $\int \frac{dx}{x^3+3x^2}$	24. $\int \frac{x^2+3x+3}{x^3+x^2+x+1}dx$
11. $\int \frac{w^2+4w-1}{w^3-w}dx$	25. $\int \frac{1+t}{1-t^3}dt$
12. $\int \frac{6x^2-2x-1}{4x^3-x}dx$	
13. $\int \frac{dx}{2x^3+x}dx$	
14. $\int \frac{x+4}{x^3+4x}dx$	

CONCEPTO DE VELOCIDAD Y ACELERACIÓN EMPLEANDO LA DERIVADA.

El movimiento de una partícula a lo largo de una recta se describe completamente por la ecuación $s=f(t)$ donde t representa el tiempo y s la distancia de la partícula a un punto P en su trayectoria. La velocidad de la partícula en el instante t está definida por $v=\frac{ds}{dt}$, si $v>0$ la partícula se mueve en la dirección de s creciente. Si $v<0$ la partícula se mueve en la dirección s decreciente.

La aceleración de la partícula en un instante t es la segunda derivada del desplazamiento o bien la derivada de la velocidad: $a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}$. Si $a > 0$ la velocidad es creciente; si $a > 0$ entonces es decreciente.

Ejemplo 1.

Se dispara un proyectil verticalmente hacia arriba con una velocidad inicial de 120 m/s. su altura sobre el suelo t segundos después está dada por $s(t) = -4.9t^2 + 120t$. Calcular el tiempo en el que el proyectil llegará al suelo de regreso y su velocidad en ese momento. ¿Cuál será su altura máxima alcanzada por el proyectil? ¿Cuál será la aceleración en cualquier instante?

Solución:

Primero se obtiene la derivada del desplazamiento:

$$v(t) = \frac{ds}{dt} = -9.8t + 120$$

El proyectil se encontrará al nivel del suelo cuando $s(t) = -4.9t^2 + 120t = 0$

Resolviendo la ecuación cuadrática que resulta:

$$-4.9t^2 + 120t = 0$$

$$t(-4.9t + 120) = 0$$

$$t = 0 \quad , \quad t = \frac{-120}{-4.9} = 24.5$$

Entonces el proyectil tocará el suelo al caer de regreso a los 24.5 seg, entonces la velocidad en ese instante será:

$$v(t) = \frac{ds}{dt} = -9.8(24.5) + 120 = -120\, m/s$$

La velocidad es negativa porque va moviéndose en dirección negativa.

La altura máxima que alcanza el proyectil es cuando la velocidad es igual a cero:

$$v(t) = -9.8t + 120 = 0$$

Resolveindo la ecuación resultante $t = \frac{-120}{-9.8} = 12.24\, seg$ entonces la altura máxima que alcanza es:

$$s(t) = -4.9(12.24)^2 + 120(12.24) = 734.7\, m$$

La aceleración en cualquier instante es: $a(t) = \frac{dv}{dt} = -9.8\, m/s^2$

Ejercicios:

1. Un automóvil baja por un plano inclinado el número de pies $s(t)$ recorridos a los t segundos está dado por $s(t) = 5t^2 + 2$. ¿Cuál es la velocidad en t=1 seg?¿En t=2 seg? ¿Cuándo alcanza una velocidad de 28 pies/seg?
2. Se dispara un proyectil verticalmente hacia arriba con una velocidad inicial de 144 pies/seg. Su altura sobe el suelo $s(t)$ en pies a los t segundos está dada por $s(t) = 144t - 16t^2$. ¿cuál es la velocidad y cuál la aceleración a los t segundos? ¿Cuáles son a los 3 seg? ¿Cuál es la altura máxima? ¿Cuándo llega al suelo?

BIBLIOGRAFIA

Zamarripa, M. (2015). Apuntes de Cálculo Integral. Unidad 1. CETIS No.33.